

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ (Ομοίως για τη διακριτή περίπτωση) όπου ολοκληρώθηκε → άδραση

Ένα πρόβλημα που προκύπτει πολύ συχνά στη στατιστική είναι η πρόβλεψη της αξίας μιας ετήσιας παρατήρησης.

Ειδικότερα, έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ από μόνιμο με σ.π.π. $f(x|\theta)$ όπου θ η τιμή της τ.τ. θ με εν συνεχεία κατανομή $\pi(\theta)$

Επιπρόσθετα έστω ότι μας ενδιαφέρει η πρόβλεψη της αξίας μιας παρατήρησης μιας τ.τ. Y με σ.π.π. $g(y|\theta)$

Υπόθεση: Δοθέντος του θ η Y είναι ανεξάρτητη των $X = (x_1, \dots, x_n)$

Στο παραπάνω στατιστικό πρόβλημα η κατανομή πρόβλεψης του Y δοθέντος του X

$$\pi(y|x) = \int Y y|\theta) \pi(\theta|x) d\theta$$

Απόδειξη:

$$\frac{\pi(y|x)}{\text{Δοθέντος } x} = \frac{\text{Από κοινά των } Y, X}{\text{Περιθώριο του } X} = \frac{h(Y, X)}{m(X)}$$

$$\begin{aligned} \text{Γνωρίζω } f(X|\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \\ \pi(\theta|x) &= \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} \end{aligned}$$

από κοινά των θ και x

περιθώριο του x

$$m(x) = \int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta$$

Y και X ανεξ/τα δοθέντος θ

$$\begin{aligned} h(x, y|\theta) &= h_1(x|\theta) h_2(y|\theta) \\ &= h_1(x|\theta) g(y|\theta) \end{aligned}$$

$$h(x, y|\theta) = \frac{\text{από κοινά των } x, y, \theta}{\text{Περιθώριο του } \theta} = \frac{h_3(x, y, \theta)}{\pi(\theta)}$$

$$\begin{aligned} h(y|x) &= \int h_3(x, y, \theta) d\theta = \int h_1(x|\theta) \pi(\theta) d\theta = \int \pi(\theta) f(x|\theta) g(y|\theta) d\theta = \\ &= \int \pi(\theta|x) m(x) g(y|\theta) d\theta = \boxed{\int g(y|\theta) \pi(\theta|x) d\theta} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$X|\theta \text{ τ.ω. } f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,2,\dots,n$$

$$\theta \sim \text{Beta}(p, q)$$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$Y|\theta \sim B(N, \theta)$$

$$g(y|\theta) = \binom{N}{y} \theta^y (1-\theta)^{N-y}, \quad y=0,1,\dots,N$$

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} \stackrel{n=1}{=} \frac{\frac{\theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)} \cdot \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{\int \frac{\theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} d\theta} \\ &= \frac{\theta^{p+x-1} (1-\theta)^{n-x+q-1}}{\int \theta^{p+x-1} (1-\theta)^{n-x+q-1} d\theta} = \frac{\theta^{p+x-1} (1-\theta)^{n-x+q-1}}{B(p+x, n-x+q)}, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(y|x) &= \int g(y|\theta) \pi(\theta|x) d\theta = \int_0^1 \binom{N}{y} \theta^y (1-\theta)^{N-y} \frac{\theta^{p+x-1} (1-\theta)^{n-x+q-1}}{B(p+x, n-x+q)} d\theta \\ &= \binom{N}{y} \frac{1}{B(p+x, n-x+q)} \int_0^1 \theta^{y+p+x-1} (1-\theta)^{N-y+n-x+q-1} d\theta \\ &= \binom{N}{y} \frac{B(y+p+x, N-y+n-x+q)}{B(p+x, n-x+q)}, \quad y=0,1,2,\dots,N \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ τυχαία δείγματα από την } f(x|\theta) = \frac{\theta^k e^{-\theta} x^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad x \geq 0$$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta} q^p}{\Gamma(p)}, \quad \theta > 0$$

$$g(y|\theta) = \frac{\theta^k y^{k-1} e^{-\theta y}}{\Gamma(k)}, \quad y > 0$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta} = \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{nk} e^{-\theta \sum x_i}}{\int \theta^{p-1} e^{-q\theta} \theta^{nk} e^{-\theta \sum x_i} d\theta}$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta^{p+nk-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^{\infty} \theta^{p+nk-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta} \stackrel{p+nk=G}{\sum_{i=1}^n x_i=H} \frac{\theta^G e^{-\theta H}}{\Gamma(G)} (\sum_{i=1}^n x_i)^G, \theta > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x\theta} dx = \theta^{-a} \Gamma(a)$$

$$\pi(y|x) = \int_0^{\infty} \frac{\theta^k y^{k-1} e^{-\theta y}}{\Gamma(k)} \frac{\theta^G e^{-\theta H}}{\Gamma(G)} H^G d\theta = \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{H^G}{\Gamma(G)} \int_0^{\infty} \theta^{k+G-1} e^{-\theta(y+H)} d\theta$$

$$a=k+G \quad \theta = \frac{1}{y+H}$$

$$\pi(y|x) = \frac{y^{k-1} H^G}{\Gamma(k) \Gamma(G)} \frac{\Gamma(k+G)}{(y+H)^{k+G}}, y > 0$$

$$= \frac{y^{k-1} H^G}{B(k, G)} \frac{1}{(y+H)^{k+G}}, y > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 3

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Τ.Δ.

$N(\theta, \sigma^2), \theta \in \mathbb{R}$

$\pi(\theta) \sim N(\mu, \tau^2)$

$Y|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$

ΠΡΟΣ ΟΠΟΙΟΝ ΔΙΑΒΑΖΕΙ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:

Το παράδειγμα 3 έχει πέρα πολλών πράξεων, και είναι πιθανό να έγινε κάποιο λάθος κατά την αντιγραφή
ΠΡΟΣΟΧΗ!

$$\pi(\theta|x) = \frac{(2\pi\tau^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2} \prod_{i=1}^n \{(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2}\}}{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi\tau^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2} \prod_{i=1}^n \{(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2}\} d\theta}$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta^2-2\theta\mu)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i-\theta)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta^2-2\theta\mu)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i-\theta)^2} d\theta}$$

οι ωχων
ισα δεν
ησπ. ισων

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(2\sum x_i \theta + n\theta^2)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2\sum x_i \theta + n\theta^2)} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2})} e^{\theta(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2})}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2})} e^{\theta(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2})} d\theta}$$

$$(2\pi \Delta \sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} (x - \mu \sigma^2 \sigma^2)^2}$$

$$(2\pi \Delta \sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} x^2} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} (-2)\mu \sigma^2 \sigma^2} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} \mu^2 \sigma^2}$$

Από τα παραπάνω:

$$\theta | x \sim N \left[\underbrace{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2} \right)}_{\tilde{\mu}(x)}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2} \right)^{-1}}_{\tilde{\sigma}^2(x)} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ} \\ \text{ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ} \end{array} \right. = \left\{ \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2} \right\}$$

$$\pi(\theta | x) = (2\pi \tilde{\sigma}^2(x))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2(x)} \theta^2} e^{\theta(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2})} e^{-\frac{\tilde{\mu}(x)^2}{2\tilde{\sigma}^2(x)}}$$

$$\pi(y | x) = \int (2\pi \sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \theta)^2} \pi(\theta | x) d\theta$$

$$= (2\pi \sigma^2)^{-1/2} (2\pi \tilde{\sigma}^2(x))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} e^{-\frac{\tilde{\mu}(x)^2}{2\tilde{\sigma}^2(x)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y\theta}{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \theta^2} e^{-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2(x)} \theta^2} e^{\theta(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2})} d\theta$$

$$\pi(y | x) = (2\pi)^{1/2} \sigma^{-1} (\tilde{\sigma}^2(x))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} e^{-\frac{\tilde{\mu}(x)^2}{2\tilde{\sigma}^2(x)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(x)}) \theta^2} e^{\theta(\frac{y}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\sum x_i}{\sigma^2})} d\theta$$

Μεταφέρει το σθασμότητα κανονικής κατανομής

$\mu \in$ Μέση τιμή: $\left(\frac{y}{\sigma^2} + \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\sigma}^2(x)} \right)$

Διακύμανση $\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(x)} \right)^{-1}$

είναι ως προς
θ και όχι ως
προς y!!!
Προ ημερίδα
μεταβιβάσω το
σθασμότητα

$$(2\pi \Delta \sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} x^2} e^{x \frac{\mu}{\Delta \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\Delta \sigma^2} \mu^2 \sigma^2}$$

τα δείχνω αυτά από το
σθασμότητα

Συμπληρώσω ότι θέλω στο οριστήριο να έχω κάποια συνάρτηση κατανομής για να κάνει 1.

$$= (2\pi)^{-1} \sigma^{-1} (\tilde{\epsilon}(x))^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} e^{-\frac{\tilde{\mu}(x)^2}{2\tilde{\epsilon}(x)}} (2\pi(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x)}))^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma} + \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\epsilon}(x)} \right)^2 \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x)}}}$$

εκείνος

Το οριστήριο έγινε γιατί κάνει 1:

$$\pi(y|x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \tilde{\epsilon}(x)^{-1} \left[\left(\frac{\tilde{\epsilon}^2(x) + \sigma^2}{\tilde{\epsilon}^2(x) \sigma^2} \right)^{-1/2} \right] * \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x)} \right)^{-1}$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} e^{-\frac{\tilde{\mu}(x)^2}{2\tilde{\epsilon}(x)}} e^{\frac{1}{2} \frac{y}{\sigma^2} \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x)} \right]}$$

$$e^{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}(x)^2}{\tilde{\epsilon}(x)}} \left[\frac{1}{\sigma^2 + \tilde{\epsilon}(x)} \right] e^{+\frac{1}{2} 2 \frac{y}{\sigma^2} \frac{\tilde{\mu}(x)}{\tilde{\epsilon}(x)} \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x)} \right]}$$

$$\pi(y|x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \tilde{\epsilon}(x)^{-1} \left[\left(\frac{\sigma^2 \tilde{\epsilon}(x)^2}{\sigma^2 + \tilde{\epsilon}(x)} \right)^{-1/2} \right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2 + \tilde{\epsilon}(x))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} y^2 \frac{1}{\tilde{\epsilon}(x) + \sigma^2}} e^{\frac{y \tilde{\mu}(x)}{\sigma^2 + \tilde{\epsilon}(x)}} \uparrow \text{σταθιστική.}$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2 \left\{ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}(x)}{\tilde{\epsilon}(x) + \sigma^2} \right\}}$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2 \frac{\sigma^2}{\tilde{\epsilon}(x) + \sigma^2}}$$

$$N(\tilde{\mu}(x), \tilde{\epsilon}(x) + \sigma^2(x))$$